**3.1. Симплексный метод**

Симплексный метод решения задач прост, универсален, позволяет использовать ЭВМ. Суть его заключается в последовательном улучшении исходного решения путем включения на каждой стадии (итерации) более эффективных элементов, обеспечивая в конечном итоге оптимальное решение.

Этот способ предусматривает:

· анализ базисного решения на оптимальность;

· систему итераций, в процессе которой оцениваются только те варианты, которые приближены к оптимальным решениям;

· оптимальное решение в связи с поставленной целью.

Определение максимума или минимума линейной функции производится при соблюдении требований неотрицательности переменных величин.

Решение задачи с использованием симплексного метода при максимизации результатов покажем на условном примере.

Требуется определить сочетание между посевами зерновых и кормовых культур, развитием скотоводства и свиноводства.

Имеются ресурсы: площадь пашни - 1300га, сенокосов и пастбищ -700га, трудовых ресурсов - 40000 чел/дн., материально-денежных ресурсов - 300000 тенге. Запасы кормов: с естественных угодий получено 4000 кормовых единиц, на кормовые цели используется весь валовой сбор кормовых культур, а также необходимое количество зернофуражных культур. Под зерновые культуры должно быть занято не более 1000 га.

Исходные положения:

Х1 - зерновые, га,

Х2 - зернофуражные культуры, га,

Х3 - кормовые культуры для получения сочных кормов,

Х4 - многолетние травы,

Х5 - поголовье крупного рогатого скота,

Х6 - поголовье свиней.

Затраты труда на 1 га: зерновые - 5 чел/дн., кукуруза на силос - 50 чел/дн., многолетние травы - 10 чел/дн., на 1 голову крупного рогатого скота - 100 чел/дн., свинью - 50 чел/дн.

Денежно-материальные затраты (тенге): на 1 га посевов зерновых культур - 100, силосных - 300, сеяных трав - 50, на 1 голову крупного рогатого скота - 400, на свинью - 200. Урожайность в ц с 1га зерновых и зернофуражных - 20, силосных - 50, трав - 25. Затраты кормов на 1 голову - 35 ц и на 1 свинью -18 ц кормовых единиц. Чистый доход на 1 га зерновых - 100 тг., на 1 корову - 150 тг., на 1 свинью - 120 тг.

Цель задачи: найти оптимальное сочетание посевов зерновых и кормовых культур, поголовья крупного рогатого скота и свиней, позволяющее максимизировать чистый доход.

На основании указанных данных составляется система неравенств.

1. По пашне: Х1 + Х2 + Х3 + Х4 1300

2. По зерновым культурам: Х1 + Х2 1000

3. По трудовым ресурсам:

5Х1 + 5Х2 + 50Х3 + 10Х4 + 100Х5 + 50Х6 40000

4. По денежно – материальным ресурсам:

100Х1 + 100Х2 + 300Х3 + 50Х4 + 400Х5 + 200Х6 300000

5. По кормам для крупного рогатого скота (в кормовых единицах):

35Х5 4000+20Х2 + 50Х3 + 25Х4

6. По кормам для свиней:

18Х6 20Х2 + 50Х3 + 25Х4

Целевая функция:

Z = 100Х1 + 150Х5 + 120Х6 max

Решение задачи симплексным методом требует превращения неравенств в равенства. Для этого вводят дополнительные неизвестные (Х7, Х8, Х9 и т.д.), обозначающие размеры недоиспользованных ресурсов. Знак при дополнительных переменных определяется видом неравенства. При ограничении ресурсов в неравенствах сверху для приведения к каноническому виду дополнительная переменная вводится со знаком «+», при ограничении снизу со знаком «-». В последнем случае вводится в уравнения искусственная переменная с коэффициентом +1.

В результате получены такие уравнения:

1. Х1 + Х2 + Х3 + Х4 +Х7 = 1300

2. Х1 + Х2 + Х3 + Х8 = 1000

3. 5Х1 + 5Х2 + 50Х3 + 10Х4 +100Х5 + 50Х6 +Х9 =40000

2. 100Х1 + 100Х2 + 300Х3 + 50Х4 +400Х5 + 200Х6 + Х10= 300000

3. -20Х2 - 50Х3 -25Х4 +35Х5 +Х11= 4000

4. -20Х2 - 50Х3 -25Х4 +18Х6 +Х12= 0

Задача сформулирована в виде системы линейных уравнений, содержащей уравнения с 12-ю неизвестными, то есть n>m. Такая система может иметь множество решений.

Решение задач симплексным методом осуществляется путем составления серии симплексных таблиц. В верхней строке (Cj) даны коэффициенты при неизвестных целевой функции. Левый крайний столбец (Cj) состоит из коэффициента целевой функции при неизвестных, вошедших в базис. Затем следует столбец базисных переменных и столбец свободных членов. Все прочие столбцы представляют собой элементы системы уравнений. Нижняя строка (Zj- Cj) называется индексной.

В первой симплексной таблице в качестве базисных берутся дополнительные переменные: Х7, Х8, Х9 и т.д. При этом Х1, Х2 , …Х6 приравниваются нулю, а Х7,Х8,…Х12 - свободным членам соответствующих уравнений системы (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Первая симплексная таблица

Сi

Сi Основные неизвестные Свободные члены 100 150 120

Х1 Х2 Х3 Х4 Х5 Х6

0 Х 7 1300 1 1 1 1 0 0

0 Х 8 1000 1 1 0 0 0 0

0 Х 9 40000 5 5 50 10 100 50

0 Х10 300000 100 100 300 50 400 200

0 Х11 4000 0 -20 -50 -25 35 0

0 Х12 0 0 -20 -50 -25 0 18

0 -100 0 0 0 -150 -120

При решении задач в симплексных таблицах математический критерий оптимальности решения состоит в следующем: если задача решается на максимум продукции, то решение будет оптимальным, когда все коэффициенты индексной строки станут неотрицательным, и если на минимум - отрицательными или равными нулю.

При решении задач на максимум поочередно вводят в число основных неосновные неизвестные, имеющие в функции цели отрицательное значение. Если таких коэффициентов в функции цели несколько, то предпочтение отдается коэффициенту с наибольшим абсолютным значением. В нашем примере Х5 равно - 150. Это означает, что необходимо развивать скотоводство, которое обеспечивает больше чистого дохода.

В базис вводится Х5, теперь следует определить какую переменную необходимо вывести из базиса. Для этого свободные члены делят на коэффициенты при Х5 соответствующих уравнений:

40000:100 =400

300000:400 =750

4000: 35 =114,28

Наименьшее частное получилось в строке Х11. Следовательно, переменную Х11 необходимо удалить из базиса, а на ее место ввести Х5. Составляется новая симплексная таблица. Переменная, которая вводится в базис, обозначается Хк, переменная, удаляемая из базиса, - Хr. Столбец Хк и строка Хrназываются главными, ключевыми. Элементы матрицы обозначаются через аij, i - номер строки, j -номер столбца, символ элементов главной строки - аri, главного столбца - аikВ новой матрице все элементы дополняются штрихом, например, a , а , а .

В исходной симплексной таблице главным элементом является 35. Значение его для новой таблицы определяется по формуле

кг

Это записывается в таблицу 2.

Все данные Х5 для новой таблицы вычисляют по формуле

Данные для нового столбца Х11 находим делением на главный элемент с учетом обратных этапов:

Остальные данные для новой таблицы находим следующим образом:

На основании этих расчетов составлена вторая симплексная таблица (табл.3.2). В этой таблице наибольший отрицательный коэффициент в функционале имеет Х3, которое должно занять место в числе основных неизвестных в следующей таблице. При определении главного элемента коэффициенты с отрицательным знаком не участвуют в расчете. На основании приведенной методики заполняется таблица 3.3.

В последней таблице 3.6 все коэффициенты функционала положительны. Решение задачи на максимум завершено. При решении задач на минимум все коэффициенты должны быть отрицательные.

Согласно полученному решению в хозяйстве целесообразно иметь:

1) площадь зерновых 1000 га, многолетних трав 191,9 га;

2) поголовье скота нужно довести до 234 голов, свиней - 197 голов. При таком сочетании чистый доход составит 160885 тенге. Зернофуражные и кукуруза в план не вошли.

Таблица 3.2

Вторая симплексная таблица

Основные неизвестные Свободные члены Не основные неизвестные

Х1 Х2 Х3 Х4 Х11 Х6

Х7 1300 1 1 1 1 0 0

Х8 1000 1 1 0 0 0 0

Х9 28600 5 62 192,5 81,25 -2,85 50

Х10 254320 100 328,4 871,0 335,5 -11,42 200

Х5 114,3 0 -0,57 -1,42 -0,71 0,03 0

Х12 0 0 -20 -50 -25 0 18

Z 17120 -100 -85,6 -214 -107 4,28 -120

Таблица 3.3

Третья симплексная таблица

Основные неизвестные Свободные члены Не основные неизвестные

Х1 Х2 Х9 Х4 Х11 Х6

Х7 1157 0,97 0,69 -0,005 0,59 0,01 -0,35

Х8 1000 1 1 0 0 0 0

Х3 148,57 0,03 0,32 0,005 0,42 -0,01 0,26

Х10 125048 77,4 48,16 -4,52 -31,75 1,46 -26

Х5 314,48 0,04 -0,14 0,007 -0,14 0,01 0,35

Х12 7150 1,25 -4,5 0,25 -4,68 -0,71 30,5

Z 48866 -94,45 -16,78 1,11 -16,81 1,12 -64,5

Таблица 3.4

Четвертая симплексная таблица

Основные неизвестные Свободные члены Не основные неизвестные

Х1 Х2 Х9 Х4 Х11 Х6

Х7 187 -0,97 -0,28 -0,005 0,59 0,01 -0,25

Х1 1000 1 1 0 0 0 0

Х3 133,57 -0,03 0,29 0,005 0,42 -0,01 0,26

Х10 47648 -77,4 -29,24 -4,52 -31,75 1,46 26

Х5 314,48 -0,04 -0,18 0,007 -0,14 0,01 0,35

Х12 7150 -1,25 -5,75 0,25 -4,68 -0,71 30,5

Z 48866 -94,45 77,67 1,11 -16,81 1,12 -64,5

Таблица 3.5

Пятая симплексная таблица

Основные неизвестные Свободные члены Не основные неизвестные

Х8 Х2 Х9 Х4 Х11 Х12

Х7 234,2 -0,98 -0,33 -0,0033 0,53 -0,004 0,008

Х1 1000 1 1 0 0 0 0

Х3 86,37 -0,02 0,33 0,003 0,45 -0,005 -0,008

Х10 52663 -78,46 -34,12 -4,31 -35,73 0,85 0,85

Х5 215,48 -0,03 -0,13 0,005 -0,10 0,02 -0,01

Х6 168,57 -0,04 -0,19 0,08 -0,15 -0,02 0,03

Z 155765 91,81 65,53 1,63 -26,68 -0,38 2,11

Таблица 3.6

Шестая симплексная таблица

Основные неизвестные Свободные члены Не основные неизвестные

Х8 Х2 Х9 Х4 Х11 Х12

Х7 133,14 -0,96 -0,71 -0,006 1,17 0,001 0,017

Х1 1000 1 1 0 0 0 0

Х4 191,93 -0,04 0,73 0,006 0,2 -0,1 -0,02

Х10 59520,7 -76,87 -7,91 -4,07 79,4 0,45 0,21

Х5 234,48 -0,03 -0,05 0,05 0,22 0,02 -0,01

Х6 197,07 -0,04 -0,29 0,03 0,33 -0,02 0,03

Z 160885,0 90,62 85,09 1,81 59,28 0,67 1,63